Examen de MATH F-309
24 Janvier 2017

Nom : **Prénom :** **Section :**

Question 1 (3 points)

(a.) Donner la définition d'un vecteur $\mathbf{X}$ de loi normale p-variée. (/.5)

(b.) Montrer que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, (\boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p/\{\mathbf{0}\}\ \mathbf{a}'\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_1(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a})$. (/2)

(c.) Supposons que $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ soit de loi normale bivariée avec

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Quelle est la loi de $X_1 | X_2 = x_2$? (/.5)

Question 2 (3 points)

Soient X_1, X_2, X_3, X_4 iid de loi commune $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Quelle est la loi de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$? (/.5)
2. Montrer que
$$\mathbf{O} := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -3/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
est une matrice orthogonale. (/.5)
3. Quelle est la loi de $\mathbf{Y} = \mathbf{O}\mathbf{X}$? (/.5)
4. En notant $Y_1, \ldots, Y_4$ les composantes de $\mathbf{Y}$ ($\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)'$), vérifier que $\frac{Y_1}{2} = \bar{X} := \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 X_i$ et $\frac{1}{4}\sum_{i=2}^4 Y_i^2 = s^2 := \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - \bar{X}^2$ (/.5)
5. En déduire la loi de $\bar{X}$, la loi de $4s^2/\sigma^2$ et l'indépendance entre ces deux variables.(/1)

Question 3 (3 points)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

1. Obtenir le test du rapport de vraisemblance pour $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$, où
$$\boldsymbol{\Sigma}_0 := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$
(/2)
2. Quelle est la loi asymptotique de la statistique du rapport de vraisemblance obtenue au point 1 ci-dessus.(/1)

Question 4 (3 points)

Considérons le problème de classifications dans le cas où $\pi_i = \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$, $i = 1, 2$. Montrer que la procédure de classification optimale (tenant compte de probabilités *a priori* p_1, p_2, ainsi que de coûts de misclassification $c_{1|2}$, $c_{2|1}$) classifie x en π_1 si

$$-\frac{1}{2}x'(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1})x + (\mu_1'\Sigma_1^{-1} - \mu_2'\Sigma_2^{-1})x \geq \frac{k}{2} + \ln\left[\frac{c_{1|2}\,p_2}{c_{2|1}\,p_1}\right]$$

et en π_2 sinon, où

$$k := \ln\left[\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}\right] + (\mu_1'\Sigma_1^{-1}\mu_1 - \mu_2'\Sigma_2^{-1}\mu_2).$$

Question 5 (4 points)

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire à valeurs sur l'hypersphère unité $\mathcal{S}^{p-1}$ de $\mathbb{R}^p$.

1. Calculer $\mathrm{E}[\mathbf{X}]$ et $\mathrm{Var}[\mathbf{X}]$. (/2)
2. Soit un échantillon i.i.d. $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ sur $\mathcal{S}^{p-1}$. Obtenez un test d'uniformité (loi uniforme sur $\mathcal{S}^{p-1}$ sous l'hypothèse nulle) fondé sur la loi asymptotique (sous l'hypothèse nulle) de $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \mathrm{E}[\mathbf{X}_1])$, où $\bar{\mathbf{X}} := n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$ est la moyenne empirique des $\mathbf{X}_i$. (/1)
3. Quel est le comportement asymptotique de la statistique de test obtenu ci-dessus lorsque $p = p_n \to \infty$ avec $n \to \infty$? (/1)

Question 6 (4 points)

Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires iid uniformes sur $[0, 1]$. Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$, où $X_1 = U_1$, $X_2 = U_2$ et $X_3 = U_1 + U_2$.

1. Obtenir les composantes principales de $\mathbf{X}$. (/3)
2. Quelle est la part de variabilité expliquée par la seconde composante principale du point 3 ci-dessus. (/1)