EXAMEN DE MATH-F-315, PARTIE STATISTIQUE, JANVIER 2016

Q1	Q2	Q3	TOTAL
/3	/3	/4	/10

INSTRUCTIONS

- Vous disposez de trois pages blanches pour répondre aux questions. Ne pas dégrafer les pages.
- Ecrire proprement svp.
- Ecrire vos nom, prénom et section sour toutes les pages de l'examen.
- Justifier vos réponses un maximum.
- L'examen se fait avec calculatrice.
- Vous avez droit au "formulaire". Vous pouvez écrire au crayon.

Question 1 (/3). On pense que le nombre de jours non pluvieux consécutifs à Londres en hiver (k) suit une loi géométrique de paramètre 1/4 (c.f. formulaire). Après 50 mesures (sur plusieurs années), on a obtenu les résultats suivants :

k	Nombre de fois que le nombre de jours non pluvieux consécutifs est k
1	14
2	12
3	7
4	5
5	4
6+	8

L'hypothèse de la distribution $G(1/4)$ (géométrique de paramètre 1/4) est-elle raisonnable ?

Question 2 (/3). Définir ce que sont les risques de première et de seconde espèce d'un test. Qu'est-ce que le Principe de Neyman ? Expliquer.

Question 3 (/4). Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables i.i.d de densité

$$f_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda} x e^{\frac{-x^2}{\lambda}}, \quad x > 0,$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre inconnu strictement positif.

1. Montrer que si X est une variable aléatoire de densité f_λ, alors $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda\pi}$. Aide : utiliser la densité d'une loi normale pour résoudre l'exercice (utiliser l'expression (intégrale) de la variance d'une loi normale). (/1)
2. Définir ce qu'est un estimateur non biaisé de λ ? (/1)
3. Soit $\hat{\lambda} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Montrer que $\hat{\lambda}$ est sans biais pour λ. Remarque : si X est une variable aléatoire de densité f_λ, alors $\mathrm{Var}[X] = \lambda(1 - \frac{\pi}{4})$. (/1)
4. Montrer que $\hat{\lambda}$ est l'estimateur maximum de vraisemblance pour λ. (/1)