

1 Calcul de probabilités

1. Axiomes

- (a) Positivité: $P(E) \geq 0$, (b) Normalisation: $P(\Omega) = 1$,
 (c) Additivité: Si $E \cap F = \emptyset$, alors $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$
 (d) Continuité: Si $E_i \subset E_{i+1}$ et $E = \lim_{i \rightarrow \infty} E_i$, alors $P(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(E_i)$

2. $P(E \setminus F) = P(E) - P(E \cap F)$

3. Boole: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

4. Si $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$, alors $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

5. Probabilités totales: $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i$ où $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$
 $P(A|T) = \sum_{i=1}^n P(B_i|T)P(A|(T \cap B_i))$

6. Bayes: $P(A_i|T) = \frac{P(A_i)P(T|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(T|A_j)P(A_j)}$

7. $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|(A \cap B)) \cdot P(D|(A \cap B \cap C))$

8. A est indépendant de $B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

2 Variables aléatoires

1. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) [= \int_a^b f_X(x)dx \text{ (cas continu)}]$.

2. $F_X(x_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow F_X^{-1}(\alpha) = Q_X(\alpha) = x_\alpha; \quad \tilde{\mu}_X = x_{0.5} = Q_X(\frac{1}{2})$

3. $\mu_X = E(X) [= \sum_x xp_X(x) \text{ (cas discret)}]$ et $[E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \text{ (continu)}]$

4. $\tilde{\mu}_k = E[(X - \mu_X)^k]$ et $\mu_k = E[X^k]$

5. $\text{var}(X) = E[\{X - E(X)\}^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

6. $\gamma = E[(X - \mu)^3]/\sigma^3$

7. $m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu_k t^k; \mu_k = \left[\frac{d^k}{dt^k} m_X(t) \right]_{t=0}$

8. Soit $Y = g(X)$, et soit $g(x)$ inversible, alors $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$

9. Si $Y = g(X) \approx g(\mu_X) + g'(\mu_X)(X - \mu_X) + \frac{g''(\mu_X)}{2}(X - \mu_X)^2 + \dots$ alors $E(Y) \approx g(\mu_X) + \frac{g''(\mu_X)}{2}\sigma_X^2$
 et $\text{var}(Y) \approx [g'(\mu_X)\sigma_X]^2$

10. $P(|X| \geq x) \leq E(|X|)/x$ en $P(|X - \mu_X| \geq d) \leq \sigma_X^2/d^2$.

3 Variables aléatoires multivariées

1. $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \text{ et } Y \leq y); p_{X,Y} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$.

2. $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ et $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1, X_2}(u_1, u_2) du_1 du_2$

3. $p_X(x) = \sum_k p_{X,Y}(x, y_k), \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v) dv, \quad F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$.

4. $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y)$.

5. $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)dy}$, $p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_Y(y) \cdot p_{X|Y}(x|y)}{\sum_y p_Y(y) \cdot p_{X|Y}(x|y)}$.
6. $E(w(X_1, X_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$; $E(w(X_1, X_2)) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} w(x_1, x_2) p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$.
7. $\text{cov}(\mathbf{X}) = \Sigma_{\mathbf{X}} = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T]$, $(\Sigma_{\mathbf{X}})_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i}) \cdot (X_j - \mu_{X_j})]$
8. $\rho_{X_1, X_2} = \text{cov}(X_1, X_2) / (\sigma_{X_1} \sigma_{X_2})$
9. Si $X_2 = aX_1 + b$ où $a \neq 0$, alors $\rho_{X_1, X_2} = \text{sign}(a) = \pm 1$
Si $\rho_{X_1, X_2} = \pm 1$, alors $\exists a, b$ tels que $P(X_2 = aX_1 + b) = 1$
10. $E(X) = E(E(X|Y))$ et $\text{var}(X) = E(\text{var}(X|Y)) + \text{var}(E(X|Y))$
11. $E(A\mathbf{X} + \mathbf{b}) = AE(\mathbf{X}) + \mathbf{b}$ et $\Sigma_{\mathbf{Y}} = A\Sigma_{\mathbf{X}}A^T$
12. $\text{var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{var}(X_k) + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{k-1} a_k a_l \text{cov}(X_k, X_l)$
13. Soient les variables X et Y indépendantes et soit $Z = X + Y$.
Cas discret: $p_z(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_X(i) p_Y(z - i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_X(z - j) p_Y(j)$
Cas continu: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$
14. Soit le nombre N indépendant de X_i pour tout i et les variables X_i indépendantes et équidistribuées.
 $E(\sum_{i=1}^N X_i) = E(N) \cdot E(X)$ et $\text{var}(\sum_{i=1}^N X_i) = (E(X))^2 \text{var}(N) + E(N) \text{var}(X)$
15. La loi normale multivariée $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det(\Sigma_{\mathbf{X}})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\Sigma_{\mathbf{X}})^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}$
16. La loi normale bivariée $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1 - \rho_{X,Y}^2}} e^{-\frac{1}{2}H(x,y)}$
où $H(x, y) = \frac{1}{1 - \rho_{X,Y}^2} \cdot \left[\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 + \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 - 2\rho_{X,Y} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \right]$
17. Soit la couple (X, Y) normale, bivariée, alors $Y|(X = x) \sim N(\mu_Y + \rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X), \sigma_Y^2 (1 - \rho_{X,Y}^2))$.
18. Théorème central limite: Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires, indépendantes et équidistribuées, et soient μ_X et σ_X^2 bornées. Alors $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu_X}{\sigma_X \sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z) = P(Z \leq z)$ où $Z \sim N(0, 1)$.

A.1 Variables aléatoires discrètes

Loi	fonction de masse	support	$E(X)$	$\text{var}(X)$
Bernoulli $p \in [0, 1]$	$P(X = 1) = p$	$\{0, 1\}$	p	$p(1 - p)$
Uniforme $l, m \in \mathbb{Z}, l \leq m$	$P(X = i) = 1/(m - l + 1)$	$\{l, l + 1, \dots, m\}$	$\frac{l+m}{2}$	$\frac{(m-l)(m-l+2)}{12}$
Binomiale $p \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	np	$np(1 - p)$
Hypergéométrique $N \in \mathbb{N}; M \in \mathbb{N}, M \leq N; n \in \mathbb{N}, n \leq N$	$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$
Binomiale négative $p \in [0, 1], r \in \mathbb{N}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} (1 - p)^{k-r} p^r$	$\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, r - 1\}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Géométrique $p \in [0, 1]$	$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$ $F(x) = 1 - (1 - p)^k$ pour $k \leq x < k + 1$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
Poisson $\mu \in \mathbb{R}^+$	$P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$	\mathbb{N}	μ	μ

A.2 Variables aléatoires continues

Loi	densité	support	$E(X)$	$\text{var}(X)$
Uniforme $a, b \in \mathbb{R}; a \leq b$	$f_X(x) = 1/(b - a)$	$[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $\lambda \in \mathbb{R}^+$	$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	\mathbb{R}^+	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Erlang $\lambda \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$	$f_T(t) = \frac{t^{r-1} \lambda^r e^{-\lambda t}}{(r-1)!}$	\mathbb{R}^+	r/λ	r/λ^2
Gamma $\lambda \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}^+$	$f_X(x) = \frac{x^{r-1} \lambda^r e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}$	\mathbb{R}^+	r/λ	r/λ^2
Bêta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+; B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$	$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$	$[0, 1]$	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$
Weibull $\beta \in \mathbb{R}^+, \delta \in \mathbb{R}^+; F_X(x) = 1 - e^{-(x/\delta)^\beta}$	$f_X(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\delta)^\beta}$	\mathbb{R}^+	$\delta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\delta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]$
Normale $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	\mathbb{R}	μ	σ^2
Log-normale $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} e^{-(\log(x)-\mu)^2/2\sigma^2}$	\mathbb{R}^+	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu+\sigma^2}$
Logistique $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+$	$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{-(x-\alpha)/\beta}}{[1 + e^{-(x-\alpha)/\beta}]^2}$	\mathbb{R}	α	$\frac{\pi^2 \beta^2}{3}$
Cauchy $x_0 \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}^+; F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctg\{(x - x_0)/\gamma\} + 0.5$	$f_X(x) = \frac{1}{\pi \gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$	\mathbb{R}	Indéfinie	∞
Chi-carré $\nu \in \mathbb{N}_0$	$f_X(x) = \frac{e^{-x/2} x^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)}$	\mathbb{R}^+	ν	2ν
Pareto $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$	$f_X(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{b+1}$	$[a, +\infty[$	$\frac{ab}{b-1}$ pour $b > 1$	$\frac{a^2 b}{(b-1)^2(b-2)}$ pour $b > 2$
Student-t $\nu \in \mathbb{N}_0$	$f_{T_\nu}(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2}) \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}$	\mathbb{R}	0 pour $\nu \geq 2$	$\frac{\nu}{\nu-2}$ pour $\nu \geq 3$
Fisher-F $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}_0$	$f_{F_{\nu_1, \nu_2}}(x) = \frac{1}{B(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2})} \frac{\nu_1^{\nu_1/2} \nu_2^{\nu_2/2} x^{\nu_1/2-1}}{(\nu_1 x + \nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$	\mathbb{R}^+	$\frac{\nu_2}{\nu_2-2}$ pour $\nu_2 > 2$	$\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ pour $\nu_2 > 4$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du, \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$

4 Estimation

Fonction de vraisemblance. Soient X_1, \dots, X_n i.i.d. P_θ (cas discret) (i.i.d. f_θ , cas continu):

1. Cas discret: $L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n P_{\theta}[X_i = x_i]$

2. Cas continu: $L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i; \theta)$

5 Tests d'hypothèses et intervalle de confiance

1. Tests d'une proportion: $H_0 : p = p_0$ où p est la probabilité d'apparition de l'événement A

(a) Test exact: Statistique de test: R le nombre d'apparition de l'événement A au cours de n expériences indépendantes.

Loi de R sous $p = p_0$: $R \sim \mathcal{B}(n, p_0)$.

(b) Test approché (si $np_0(1 - p_0) \geq 9$): Statistique de test: $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Loi de Z sous $p = p_0$: $Z \approx \mathcal{N}(0, 1)$ où $\hat{p} = \frac{R}{n}$.

2. Test de comparaison de deux proportions: $H_0 : p_1 = p_2$ (si $n_1, n_2 \geq 30$) à partir de deux échantillons indépendants:

Statistique de test: $Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ où $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$.

Loi de Z sous $p_1 = p_2$: $Z \approx \mathcal{N}(0, 1)$.

3. Tests d'une moyenne: $H_0 : \mu = \mu_0$.

(a) Variance σ^2 connue. Statistique de test: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

i. Tests exacts (population gaussienne). Loi de T sous $\mu = \mu_0$: $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

ii. Test approché (si $n \geq 30$). Loi de T sous $\mu = \mu_0$: $T \approx \mathcal{N}(0, 1)$.

(b) Variance σ^2 inconnue. Statistique de test: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$.

i. Tests exacts (population gaussienne). Loi de T sous $\mu = \mu_0$: $T \sim t_{n-1}$.

ii. Test approché (si $n \geq 30$). Loi de T sous $\mu = \mu_0$: $T \approx \mathcal{N}(0, 1)$.

4. Tests de comparaison de deux moyennes: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ à partir de deux échantillons indépendants.

(a) Tests exacts (populations gaussiennes): X_{1j}, \dots, X_{1n_j} iid $\mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ avec σ_j^2 inconnus mais égaux ($j = 1, 2$). Statistique de test: $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ avec $S_p^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$.

Loi de T sous $\mu_1 = \mu_2$: $T \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$.

(b) Test approché (si $n_1, n_2 \geq 50$): Statistique de test: $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$.

Loi de T sous $\mu_1 = \mu_2$: $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

5. Tests chi-carré

(a) Test χ^2 d'indépendance: Soit $(n_{11}, \dots, n_{1I}, n_{12}, \dots, n_{1J}, \dots, n_{IJ})$

$\sim \text{Mult}(n; n_{11}, \dots, n_{1I}, n_{12}, \dots, n_{1J}, \dots, n_{IJ})$. Sous $H_0 : p_{ij} = p_{i \cdot} p_{\cdot j} \forall i = 1, \dots, I, j =$

$1, \dots, J, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i \cdot} n_{\cdot j}}{n})^2}{\frac{n_{i \cdot} n_{\cdot j}}{n}} \sim \chi_{(I-1)(J-1)}^2$

(b) Test χ^2 d'homogénéité: Soient $(n_{1j}, \dots, n_{Ij}) \sim \text{Mult}(n_j; p_{1j}, \dots, p_{Ij})$ $j = 1, \dots, J$ indépendants.

Sous $H_0 : p_{i1} = p_{i2} = \dots = p_{iJ}, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i \cdot} n_{\cdot j}}{n})^2}{\frac{n_{i \cdot} n_{\cdot j}}{n}} \sim \chi_{(I-1)(J-1)}^2$

(c) Test χ^2 d'ajustement: Sous $H_0 : p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0, \dots, p_I = p_I^0, \sum_{i=1}^I \frac{(n_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \sim \chi_{(I-1)}^2$

C Tables de la fonction de répartition de la loi Student

Soit T une variable aléatoire qui suit une loi de Student à ν degrés de liberté, notée $T \sim t_\nu$.

La table donne les valeurs $t_{\nu;1-\alpha}$ telles que $F_\nu(t_{\nu;1-\alpha}) \stackrel{\text{déf}}{=} P(T \leq t_{\nu;1-\alpha}) = 1 - \alpha$.

Par exemple: $t_{4;0,90} = 1,533$ ce qui implique que $P(T \leq 1,533) = 0,90$ si $T_4 \sim t_4$.

$\nu \downarrow \rightarrow F_\nu(t)$	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,454	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
90	0,254	0,526	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Exemple: si $T \sim t_5$ alors $P(T \geq 2.015) = 0.05$ et $t_{\nu=5;0.05} = 2.015$.

$\nu \downarrow$	0.3	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001
1	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.90	31.82	63.66	127.3	318.3
2	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.10	22.33
3	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21
4	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173
5	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893
6	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208
7	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785
8	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501
9	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297
10	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144
11	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025
12	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930
13	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852
14	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787
15	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733
16	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686
17	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646
18	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610
19	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579
20	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552
21	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527
22	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505
23	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485
24	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467
25	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450
26	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435
27	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421
28	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408
29	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396
30	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385
40	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307
50	0.528	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261
100	0.526	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174
200	0.525	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.067	2.345	2.601	2.839	3.131
∞	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.090

D Tableau de la fonction de répartition de la loi chi-carré

Soit X_ν une variable aléatoire qui suit une loi chi-carré à ν degrés de liberté, notée $X_\nu \sim \chi_\nu^2$.

La table donne les valeurs $\chi_{\nu,1-\alpha}^2$ telles que $F_\nu(\chi_{\nu,1-\alpha}^2) \stackrel{\text{déf}}{=} P(X_\nu \leq \chi_{\nu,1-\alpha}^2) = 1 - \alpha$. Par exemple: $\chi_{4;0,10}^2 = 1,06$, ce qui implique que $P(X_4 \leq 1,06) = 0,10$ si $X_4 \sim \chi_4^2$.

$\nu \downarrow \rightarrow F_\nu(t)$	0,001	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
1	—	—	—	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,002	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,024	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,091	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	3,36	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,210	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	4,35	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,381	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	5,35	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,598	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	0,857	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,3	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,3	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,3	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,3	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	31,7
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,3	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	16,3	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	17,3	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	18,3	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	19,3	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	6,45	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	20,3	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	6,98	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	21,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	7,53	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	22,3	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	8,08	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	23,3	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	8,65	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	24,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	9,22	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	25,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	9,80	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	26,3	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	10,4	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	27,3	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	11,0	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	28,3	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	11,6	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	29,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
32	12,8	15,1	16,4	18,3	20,1	22,3	31,3	42,6	46,2	49,5	53,5	56,3	62,5
34	14,1	16,5	17,8	19,8	21,7	24,0	33,3	44,9	48,6	52,0	56,1	59,0	65,2
36	15,3	17,9	19,2	21,3	23,3	25,6	35,3	47,2	51,0	54,4	58,6	61,6	68,0
38	16,6	19,3	20,7	22,9	24,9	27,3	37,3	49,5	53,4	56,9	61,2	64,2	70,7
40	17,9	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	39,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4
50	24,7	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	49,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
60	31,7	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	59,3	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0	99,6
70	39,0	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	69,3	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2	112,3
80	46,5	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	79,3	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3	124,8
90	54,2	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	89,3	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3	137,2
100	61,9	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	99,3	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2	149,4

D Table pour les variables de Fisher

Exemple: Si $F \sim F_{5,3}$ alors $P(F > 9.01) = 0.05$; $f_{\nu_1=5, \nu_2=3; 0.05} = 9.01$ et $f_{3,5; 0.95} = 1/9.01$.

$\nu_1 \downarrow$	α	ν_2 :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.05		161.45	18.51	10.13	7.71	6.61	5.99	5.59	5.32	5.12	4.96
	0.025		647.79	38.51	17.44	12.22	10.01	8.81	8.07	7.57	7.21	6.94
	0.01		4052.18	98.50	34.12	21.20	16.26	13.75	12.25	11.26	10.56	10.04
	0.005		16210.72	198.50	55.55	31.33	22.78	18.63	16.24	14.69	13.61	12.83
2	0.05		199.50	19.00	9.55	6.94	5.79	5.14	4.74	4.46	4.26	4.10
	0.025		799.50	39.00	16.04	10.65	8.43	7.26	6.54	6.06	5.71	5.46
	0.01		4999.50	99.00	30.82	18.00	13.27	10.92	9.55	8.65	8.02	7.56
	0.005		19999.50	199.00	49.80	26.28	18.31	14.54	12.40	11.04	10.11	9.43
3	0.05		215.71	19.16	9.28	6.59	5.41	4.76	4.35	4.07	3.86	3.71
	0.025		864.16	39.17	15.44	9.98	7.76	6.60	5.89	5.42	5.08	4.83
	0.01		5403.35	99.17	29.46	16.69	12.06	9.78	8.45	7.59	6.99	6.55
	0.005		21614.74	199.17	47.47	24.26	16.53	12.92	10.88	9.60	8.72	8.08
4	0.05		224.58	19.25	9.12	6.39	5.19	4.53	4.12	3.84	3.63	3.48
	0.025		899.58	39.25	15.10	9.60	7.39	6.23	5.52	5.05	4.72	4.47
	0.01		5624.58	99.25	28.71	15.98	11.39	9.15	7.85	7.01	6.42	5.99
	0.005		22499.58	199.25	46.19	23.15	15.56	12.03	10.05	8.81	7.96	7.34
5	0.05		230.16	19.30	9.01	6.26	5.05	4.39	3.97	3.69	3.48	3.33
	0.025		921.85	39.30	14.88	9.36	7.15	5.99	5.29	4.82	4.48	4.24
	0.01		5763.65	99.30	28.24	15.52	10.97	8.75	7.46	6.63	6.06	5.64
	0.005		23055.80	199.30	45.39	22.46	14.94	11.46	9.52	8.30	7.47	6.87
6	0.05		233.99	19.33	8.94	6.16	4.95	4.28	3.87	3.58	3.37	3.22
	0.025		937.11	39.33	14.73	9.20	6.98	5.82	5.12	4.65	4.32	4.07
	0.01		5858.99	99.33	27.91	15.21	10.67	8.47	7.19	6.37	5.80	5.39
	0.005		23437.11	199.33	44.84	21.97	14.51	11.07	9.16	7.95	7.13	6.54
7	0.05		236.77	19.35	8.89	6.09	4.88	4.21	3.79	3.50	3.29	3.14
	0.025		948.22	39.36	14.62	9.07	6.85	5.70	4.99	4.53	4.20	3.95
	0.01		5928.36	99.36	27.67	14.98	10.46	8.26	6.99	6.18	5.61	5.20
	0.005		23714.57	199.36	44.43	21.62	14.20	10.79	8.89	7.69	6.88	6.30
8	0.05		238.88	19.37	8.85	6.04	4.82	4.15	3.73	3.44	3.23	3.07
	0.025		956.66	39.37	14.54	8.98	6.76	5.60	4.90	4.43	4.10	3.85
	0.01		5981.07	99.37	27.49	14.80	10.29	8.10	6.84	6.03	5.47	5.06
	0.005		23925.41	199.37	44.13	21.35	13.96	10.57	8.68	7.50	6.69	6.12
9	0.05		240.54	19.38	8.81	6.00	4.77	4.10	3.68	3.39	3.18	3.02
	0.025		963.28	39.39	14.47	8.90	6.68	5.52	4.82	4.36	4.03	3.78
	0.01		6022.47	99.39	27.35	14.66	10.16	7.98	6.72	5.91	5.35	4.94
	0.005		24091.00	199.39	43.88	21.14	13.77	10.39	8.51	7.34	6.54	5.97
10	0.05		241.88	19.40	8.79	5.96	4.74	4.06	3.64	3.35	3.14	2.98
	0.025		968.63	39.40	14.42	8.84	6.62	5.46	4.76	4.30	3.96	3.72
	0.01		6055.85	99.40	27.23	14.55	10.05	7.87	6.62	5.81	5.26	4.85
	0.005		24224.49	199.40	43.69	20.97	13.62	10.25	8.38	7.21	6.42	5.85

Table pour les variables de Fisher

Exemple: $F \sim F_{12,15}$ alors $P(F > 3.67) = 0.01$; $f_{\nu_1=12, \nu_2=15; 0.01} = 3.67$ et $f_{15,12; 0.99} = 1/3.67$.

$\nu_1 \downarrow$	α	ν_2									
		11	12	13	14	15	20	30	50	70	100
11	0.05	2.82	2.72	2.63	2.57	2.51	2.31	2.13	1.99	1.93	1.89
	0.025	3.47	3.32	3.20	3.09	3.01	2.72	2.46	2.26	2.18	2.12
	0.01	4.46	4.22	4.02	3.86	3.73	3.29	2.91	2.63	2.51	2.43
	0.005	5.32	4.99	4.72	4.51	4.33	3.76	3.25	2.90	2.76	2.66
12	0.05	2.79	2.69	2.60	2.53	2.48	2.28	2.09	1.95	1.89	1.85
	0.025	3.43	3.28	3.15	3.05	2.96	2.68	2.41	2.22	2.14	2.08
	0.01	4.40	4.16	3.96	3.80	3.67	3.23	2.84	2.56	2.45	2.37
	0.005	5.24	4.91	4.64	4.43	4.25	3.68	3.18	2.82	2.68	2.58
13	0.05	2.76	2.66	2.58	2.51	2.45	2.25	2.06	1.92	1.86	1.82
	0.025	3.39	3.24	3.12	3.01	2.92	2.64	2.37	2.18	2.10	2.04
	0.01	4.34	4.10	3.91	3.75	3.61	3.18	2.79	2.51	2.40	2.31
	0.005	5.16	4.84	4.57	4.36	4.18	3.61	3.11	2.76	2.62	2.52
14	0.05	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.22	2.04	1.89	1.84	1.79
	0.025	3.36	3.21	3.08	2.98	2.89	2.60	2.34	2.14	2.06	2.00
	0.01	4.29	4.05	3.86	3.70	3.56	3.13	2.74	2.46	2.35	2.27
	0.005	5.10	4.77	4.51	4.30	4.12	3.55	3.06	2.70	2.56	2.46
15	0.05	2.72	2.62	2.53	2.46	2.40	2.20	2.01	1.87	1.81	1.77
	0.025	3.33	3.18	3.05	2.95	2.86	2.57	2.31	2.11	2.03	1.97
	0.01	4.25	4.01	3.82	3.66	3.52	3.09	2.70	2.42	2.31	2.22
	0.005	5.05	4.72	4.46	4.25	4.07	3.50	3.01	2.65	2.51	2.41
20	0.05	2.65	2.54	2.46	2.39	2.33	2.12	1.93	1.78	1.72	1.68
	0.025	3.23	3.07	2.95	2.84	2.76	2.46	2.20	1.99	1.91	1.85
	0.01	4.10	3.86	3.66	3.51	3.37	2.94	2.55	2.27	2.15	2.07
	0.005	4.86	4.53	4.27	4.06	3.88	3.32	2.82	2.47	2.33	2.23
30	0.05	2.57	2.47	2.38	2.31	2.25	2.04	1.84	1.69	1.62	1.57
	0.025	3.12	2.96	2.84	2.73	2.64	2.35	2.07	1.87	1.78	1.71
	0.01	3.94	3.70	3.51	3.35	3.21	2.78	2.39	2.10	1.98	1.89
	0.005	4.65	4.33	4.07	3.86	3.69	3.12	2.63	2.27	2.13	2.02
50	0.05	2.51	2.40	2.31	2.24	2.18	1.97	1.76	1.60	1.53	1.48
	0.025	3.03	2.87	2.74	2.64	2.55	2.25	1.97	1.75	1.66	1.59
	0.01	3.81	3.57	3.38	3.22	3.08	2.64	2.25	1.95	1.83	1.74
	0.005	4.49	4.17	3.91	3.70	3.52	2.96	2.46	2.10	1.95	1.84
70	0.05	2.48	2.37	2.28	2.21	2.15	1.93	1.72	1.56	1.49	1.43
	0.025	2.99	2.83	2.70	2.60	2.51	2.20	1.92	1.70	1.60	1.53
	0.01	3.75	3.51	3.32	3.16	3.02	2.58	2.18	1.88	1.75	1.66
	0.005	4.41	4.09	3.84	3.62	3.45	2.88	2.38	2.02	1.86	1.75
100	0.05	2.46	2.35	2.26	2.19	2.12	1.91	1.70	1.52	1.45	1.39
	0.025	2.96	2.80	2.67	2.56	2.47	2.17	1.88	1.66	1.56	1.48
	0.01	3.71	3.47	3.27	3.11	2.98	2.54	2.13	1.82	1.70	1.60
	0.005	4.36	4.04	3.78	3.57	3.39	2.83	2.32	1.95	1.80	1.68

E Table pour les variables chi-carré

Exemple: si $Y \sim \chi_7^2$ alors $P(Y \geq 14.1) = 0.05$, et donc $\chi_{7;0.05}^2 = 14.1$.

$\nu \downarrow$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
31	55.0	52.2	48.2	45.0	41.4	35.9	30.3	25.4	21.4	19.3	17.5	15.7	14.5
32	56.3	53.5	49.5	46.2	42.6	37.0	31.3	26.3	22.3	20.1	18.3	16.4	15.1
33	57.6	54.8	50.7	47.4	43.7	38.1	32.3	27.2	23.1	20.9	19.0	17.1	15.8
34	59.0	56.1	52.0	48.6	44.9	39.1	33.3	28.1	24.0	21.7	19.8	17.8	16.5
35	60.3	57.3	53.2	49.8	46.1	40.2	34.3	29.1	24.8	22.5	20.6	18.5	17.2
36	61.6	58.6	54.4	51.0	47.2	41.3	35.3	30.0	25.6	23.3	21.3	19.2	17.9
37	62.9	59.9	55.7	52.2	48.4	42.4	36.3	30.9	26.5	24.1	22.1	20.0	18.6
38	64.2	61.2	56.9	53.4	49.5	43.5	37.3	31.8	27.3	24.9	22.9	20.7	19.3
39	65.5	62.4	58.1	54.6	50.7	44.5	38.3	32.7	28.2	25.7	23.7	21.4	20.0
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7